پیوست دوم
حل روابط بازگشتی: با کاربردهایی برای تحلیل روابط بازگشتی

تحلیل و طراحی الگوریتم ها

حل روابط بازگشتی

- پیچیدگی زمانی یک الگوریتم بازگشتی بوسیله یک معادله بازگشتی بیان می شود
- برای تعیین پیچیدگی زمانی باید معادله بازگشتی را حل نمود، یا به عبارتی تبدیل به رابطه مستقیم کرد.
- روش های حل روابط بازگشتی
  - حدس (خوب) و استقراء
  - معادله مشخصه
  - جایگذاری
  - قضیه اصلی
  - درخت بازگشت

حل روابط بازگشتی بوسیله استقراء

- الگوریتم فاکتوریل
  - مساله: $n! = n(n-1)(n-1)\ldots(3)(2)(1)$ که $n \geq 1$ و $0! = 1$ را محاسبه کنید.
  - ورودی ها: یک عدد صحیح و غیر منفی n.
  - خروجی ها: $n!$.

```
int fact ( int n)
{
    if ( n == 0)
        return 1 ;
    else
        return n * fact ( n – 1) ;
}
```

محاسبه تعداد ضرب های انجام شده

- معادله بازگشتی

$$t_n = t_{n-1} + 1$$

که در آن:

  - t_{n-1}: تعداد ضرب ها در فراخوانی بازگشتی
  - ۱: عمل ضرب در بالاترین سطح

- شرط اولیه: $t_0 = 0$

- حل رابطه بازگشتی:
  - با بررسی چند مقدار اول یک راه حل کاندیدا بدست آورید

$$t_1 = t_0 + 1 = 0 + 1 = 1$$
$$t_2 = t_1 + 1 = 1 + 1 = 2$$
$$t_3 = t_2 + 1 = 2 + 1 = 3$$
$$\ldots$$
$$t_n = n$$

  - درستی راه حل کاندیدا را با استقرا ثابت کنید.

اثبات بوسیله استقراء

- پایه استقراء: برای $n = 0$ داریم:

$$t_0 = 0$$

- فرض استقراء: فرض کنید برای یک عدد صحیح و مثبت n داریم:

$$t_n = n$$

- گام استقراء: باید نشان دهیم که:

$$t_{n+1} = n + 1$$

$$t_{n+1} = t_{(n+1)-1} + 1 = t_n + 1 = n + 1$$

حل روابط بازگشتی بوسیله استقرا

- بازگشتی زیر را در نظر بگیرید:

- $$\begin{cases} t_n = t_{n/2} + 1 & for\, n > 1, \quad n \quad a \quad power\, of \quad 2 \\ t_1 = 1 \end{cases}$$

چند مقدار اولیه عبارتند از:

$$t_2 = t_{2/2} + 1 = t_1 + 1 = 1 + 1 = 2$$
$$t_4 = t_{4/2} + 1 = t_2 + 1 = 2 + 1 = 3$$
$$t_8 = t_{8/2} + 1 = t_4 + 1 = 3 + 1 = 4$$
$$t_{16} = t_{16/2} + 1 = t_8 + 1 = 4 + 1 = 5$$

حدس می زنیم که :

$$t_n = \lg n + 1$$

حال، بوسیله استقراء حدس خود را بررسی می کنیم.

حل روابط بازگشتی بوسیله استقرا

پایه استقراء: برای $n = 1$ داریم:

$t_1 = \lg 1 + 1 = 1$

فرض استقراء: فرض کنید برای مقدار دلخواه $n > 2$ که n توانی از ۲ می باشد داریم:

$$t_n = \lg n + 1$$

گام استقراء:

$$t_{2n} = \lg (2n) + 1$$

$$\begin{aligned} t_{2n} &= t_{(2n/2)} + 1 = t_n + 1 = \mathbf{\lg}\ \boldsymbol{n} \mathbf{+ 1} + 1 \\ &= \lg n + \lg 2 + 1 \\ &= \lg (2n) + 1 \end{aligned}$$

حل روابط بازگشتی بوسیله استقرا

- بازگشتی زیر را در نظر بگیرید:

- $$\begin{cases} t_n = 7t_{n/2} & \text{for } n > 1, \quad n \quad a \quad power\ of \quad 2 \\ t_1 = 1 \end{cases}$$

چند مقدار اولیه عبارتند از:

$$t_2 = 7t_{2/2} = 7t_1 = 7$$
$$t_4 = 7t_{4/2} = 7t_2 = 7^2$$
$$t_8 = 7t_{8/2} = 7t_4 = 7^3$$
$$t_{16} = 7t_{16/2} = 7t_8 = 7^4$$

حدس می زنیم که:

$$t_n = 7^{\lg n}$$

حال باید بوسیله استقراء ثابت کنیم که حل درست است.

اثبات به کمک استقراء

- پایه استقراء:
  - برای $n = 1$ داریم:

$$t_1 = 7^{\lg 1} = 7^0 = 1$$

- فرض استقراء:
  - فرض کنید برای هر مقدار دلخواه $n > 2$ که n توانی از ۲ باشد داریم:

$$t_n = 7^{\lg n}$$

- گام استقراء:
  - باید نشان دهیم که:

$$t_{2n} = 7^{\lg(2n)}$$

$$t_{2n} = 7t_{2n/2} = 7t_n = 7 * \mathbf{7^{\lg n}} = 7^{1 + \lg n} = 7^{\lg 2 + \lg n} = 7^{\lg(2n)}$$

و چون

$$7^{\lg n} = n^{\lg 7} \Rightarrow t_n = n^{\lg 7} \approx n^{2.81}$$

حل روابط بازگشتی بوسیله استقرا

- بازگشتی زیر را در نظر بگیرید:

- $$\begin{cases} t_n = 2t_{n/2} + n - 1 & for\, n > 1, \quad n \quad a \quad power\, of \quad 2 \\ t_1 = 0 \end{cases}$$

چند مقدار اولیه عبارتند از:

$$t_2 = 2t_{2/2} + 2 - 1 = 2t_1 + 1 = 1$$
$$t_4 = 2t_{4/2} + 4 - 1 = 2t_2 + 3 = 5$$
$$t_8 = 2t_{8/2} + 8 - 1 = 2t_4 + 7 = 17$$
$$t_{16} = 2t_{16/2} + 16 - 1 = 2t_8 + 15 = 49$$

چون راه حل کاندیدای واضحی وجود ندارد، نمی توان از استقراء استفاده نمود.

حل روابط بازگشتی بوسیله معادله مشخصه

- رابطه بازگشتی خطی همگن: یک رابطه بازگشتی به شکل زیر

$$a_0\, t_n + a_1\, t_{n-1} + \ldots + a_k\, t_{n-k} = 0$$

که در آن k و جملات a_i ثابت می باشند، یک رابطه بازگشتی **خطی همگن** با ضرایب ثابت نامیده می شود.

چند مثال

- $7\,t_n - 3\,t_{n\text{-}1} = 0$
- $6\,t_n - 5\,t_{n\text{-}1} + 8\,t_{n\text{-}2} = 0$
- $8\,t_n - 4t_{n\text{-}3} = 0$
- (Fibonacci sequence): $t_n = t_{n\text{-}1} + t_{n\text{-}2}$ =>

  $t_n - t_{n\text{-}1} - t_{n\text{-}2} = 0$

$$\begin{cases} t_n - 5t_{n-1} + 6t_{n-2} = 0 \qquad for \quad n > 1 \\ t_0 = 0 \\ t_1 = 1 \end{cases}$$

معادله مشخصه

- معادله مشخصه رابطه بازگشتی خطی همگن با ضرایب ثابت به صورت زیر

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = 0$$

برابر است با

$$a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \ldots + a_k r^0 = 0$$

- مثال: معادله مشخصه رابطه بازگشتی زیر را تعیین کنید

$$5\ t_n - 7\ t_{n-1} + 6\ t_{n-2} = 0$$

$$5r^2 - 7r + 6 = 0$$

قضیه B.1

- فرض کنید رابطه بازگشتی خطی همگن با ضرایب ثابت زیر داده شده است:

$$a_0\, t_n + a_1\, t_{n\text{-}1} + \ldots + a_k\, t_{n\text{-}k} = 0$$

اگر معادله مشخصه آن که به صورت زیر می باشد

$$a_0\, r^k + a_1\, r^{k\text{-}1} + \ldots + a_k\, r^0 = 0$$

دارای k ریشه متمایز $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k$ باشد، آنگاه تنها حل رابطه بازگشتی به صورت زیر می باشد

$$t_n = c_1\, r_1^{\,n} + c_2\, r_2^{\,n} + \ldots + c_k\, r_k^{\,n}$$

که در آن جملات c_i ثابت های دلخواهی می باشند.

حل روابط بازگشتی: مثال

- مثال

- $\begin{cases} t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} = 0 \quad for \quad n > 1 \\ t_0 = 0 \\ t_1 = 1 \end{cases}$

$r^2 - 3r - 4 = 0 \Rightarrow (r-4)(r+1) = 0 \Rightarrow r = 4, -1$

$t_n = c_1 4^n + c_2(-1)^n$

$\begin{cases} t_0 = c_1 4^0 + c_2(-1)^0 = 0 \\ t_1 = c_1 4^1 + c_2(-1)^1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 4c_1 - c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1/5 \\ c_2 = -1/5 \end{cases}$

$t_n = 1/5(4^n) - 1/5(-1)^n$

حل روابط بازگشتی: مثال

- مثال: دنباله فیبوناچی

- $$\begin{cases} t_n - t_{n-1} - t_{n-2} = 0 & for \quad n > 1 \\ t_0 = 0 \\ t_1 = 1 \end{cases}$$

$r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow \ r = (1 + \sqrt{5})/2, \ \ r = (1 - \sqrt{5})/2)$

$$t_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

حل روابط بازگشتی: مثال

- مثال: دنباله فیبونانچی

$$\begin{cases} t_0 = c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 0 \\ t_1 = c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)c_1 + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)c_2 = 1 \end{cases}$$

$$c_1 = 1/\sqrt{5}, \qquad c_2 = -1/\sqrt{5}$$

$$t_n = \frac{[(1+\sqrt{5})/2]^n - [(1-\sqrt{5})/2]^n}{\sqrt{5}}$$

قضیه B.2

- فرض کنید که r یک ریشه با تعداد m از معادله مشخصه یک رابطه بازگشتی خطی همگن با ضرایب ثابت باشد. آنگاه تمامی جملات زیر:

$$t_n = r^n,\ t_n = nr^n,\ t_n = n^2 r^n,\ t_n = n^3 r^n,\ \ldots,\ t_n = n^{m-1} r^n$$

راه حلی برای رابطه بازگشتی می باشند. بنابراین بازاء هر یک از این جواب ها، یک جمله در راه حل عمومی رابطه بازگشتی گنجانده می شود.

حل روابط بازگشتی: مثال

- مثال

- $$\begin{cases} t_n - 7t_{n-1} + 15t_{n-2} - 9t_{n-3} = 0 & \textit{for} \quad n > 2 \\ t_0 = 0 \\ t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{cases}$$

$$r^3 - 7r^2 + 15r - 9 = 0 \Rightarrow (r-1)(r-3)^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{r} = 1, \mathrm{r} = 3$$

$$t_n = c_1 1^n + c_2 3^n + c_3 n 3^n$$

$$\begin{cases} t_0 = c_1 1^0 + c_2 3^0 + c_3(0)(3^0) = 0 \\ t_1 = c_1 1^1 + c_2 3^1 + c_3(1)(3^1) = 1 \\ t_2 = c_1 1^2 + c_2 3^2 + c_3(2)(3^2) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 3c_2 + 3c_3 = 1 \\ c_1 + 9c_2 + 18c_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = -1/3 \end{cases}$$

$$t_n = (-1)1^n + (1)3^n + (-1/3)(n3^n) = -1 + 3^n - n3^{n-1}$$

حل روابط بازگشتی: مثال

- مثال

- $$\begin{cases} t_n - 5t_{n-1} + 7t_{n-2} - 3t_{n-3} = 0 \quad \text{for} \quad n > 2 \\ t_0 = 1 \\ t_1 = 2 \\ t_2 = 3 \end{cases}$$

$$r^3 - 5r^2 + 7r - 3 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 (r-3) = 0 \Rightarrow r = 1, r = 3$$

$$t_n = c_1 3^n + c_2 1^n + c_3 n 1^n$$

$$\begin{cases} t_0 = c_1 3^0 + c_2 1^0 + c_3 (0)(1^0) = 1 \\ t_1 = c_1 3^1 + c_2 1^1 + c_3 (1)(1^1) = 2 \\ t_2 = c_1 3^2 + c_2 1^2 + c_3 (2)(1^2) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 3c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ 9c_1 + c_2 + 2c_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

$$t_n = 0(3^n) + 1(1^n) + 1(n1^n) = n + 1$$

روابط بازگشتی غیر همگن

- یک رابطه به شکل زیر:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = f(n)$$

که در آن k و جملات a_k ثابت می باشند و $f(n)$ یک تابع غیر صفر می باشد، یک رابطه بازگشتی خطی **غیر همگن** با ضرایب ثابت نام دارد.

یک مورد خاص و متداول: قضیه B.3

- رابطه بازگشتی غیر همگن زیر:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = b^n p(n)$$

که در آن b یک ثابت و $p(n)$ یک چند جمله ای برحسب n از درجه d می باشد، می تواند به یک رابطه بازگشتی خطی همگن که معادله مشخصه آن به صورت زیر می باشد، تبدیل شود:

$$(a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \ldots + a_k r^0)(r - b)^{d+1} = 0$$

اگر در سمت راست بیش از یک جمله مانند $b^n p(n)$ وجود داشته باشد، بازاء هر کدام یک جمله به معادله مشخصه اضافه می شود.

حل روابط بازگشتی: مثال

- مثال:

$$t_n - 3t_{n-1} = 4^n$$

$b = 4$, $p(n) = 1 = n^0$

$(r - 3)(r - 4)^{0+1} = 0$

- مثال:

$$t_n - 3t_{n-1} = 4^n(8n + 7)$$

$b = 4$, $p(n) = 8n^1 + 7$

$(r - 3)(r - 4)^{1+1} = 0$

حل روابط بازگشتی: مثال

- مثال:

- $$\begin{cases} t_n - 3t_{n-1} = 4^n(2n+1) \quad for \quad n>1 \\ t_0 = 0 \\ t_1 = 12 \end{cases}$$

$$(r-3)(r-4)^{1+1} = 0 \Rightarrow (r-3)(r-4)^2 = 0 \Rightarrow t_n = c_1 3^n + c_2 4^n + c_3 n 4^n$$

$$t_2 - 3t_1 = 4^2(2 * 2 + 1) \Rightarrow t_2 = 3*12 + 80 = 116$$

$$t_n = 20(3^n) - 20(4^n) + 8n4^n$$

حل روابط بازگشتی: مثال

- مثال:

- $$\begin{cases} t_n - t_{n-1} = n-1 \quad for \quad n>0 \\ t_0 = 0 \end{cases}$$

$$b^n p(n) = n - 1 = 1^n(n^1 - 1) \Rightarrow b = 1,\ d = 1$$

$$(r - 1)(r - 1)^{1+1} = 0 \Rightarrow (r - 1)^3 = 0$$

$$\Rightarrow t_n = c_1 1^n + c_2 n 1^n + c_3 n^2 1^n \Rightarrow t_n = c 1 + c_2 n + c_3 n^2$$

$$t_1 = t_0 + 1 - 1 = 0 + 0 = 0$$

$$t_2 = t_1 + 2 - 1 = 0 + 1 = 1$$

$$t_n = n(n - 1)/2$$

حل روابط بازگشتی: مثال

- مثال:

$$\begin{cases} t_n - 2t_{n-1} = n + 2^n & for \quad n > 1 \\ t_1 = 0 \end{cases}$$

$$n = (\underbrace{1}_{b}{}^n)n^{\overbrace{1}^{d}} \qquad 2^n = (\underbrace{2}_{b}{}^n)n^{\overbrace{0}^{d}}$$

$$(r-1)^{1+1} \qquad (r-2)^{0+1}$$

$$(r-2)(r-1)^2(r-2) = (r-2)^2(r-1)^2$$

تغییر متغیر

- تغییر متغیر می تواند یک رابطه بازگشتی را به یک رابطه جدید تبدیل کند که در شکلی باشد که توسط قضیه B.3 قابل حل گردد.
- مثال:

تغییر متغیر: مثال

- مثال

- $$\begin{cases} T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1 & for\, n > 1, \quad n \quad a \quad power\, of \quad 2 \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

$$n = 2^k \Rightarrow = k = \lg n$$

$$\Rightarrow T(2^k) = T(\frac{2^k}{2}) + 1 = T(2^{k-1}) + 1$$

$$t_k = T(2^k)$$

$$\Rightarrow t_k = t_{k-1} + 1 \Rightarrow t_k - t_{k-1} = 1$$

$$\Rightarrow t_k = c_1 + c_2 k$$

$$\Rightarrow T(2^k) = c_1 + c_2 k$$

$$\Rightarrow T(n) = c_1 + c_2 \lg n$$

$$\Rightarrow T(n) = 1 + \lg n$$

تغییر متغیر: مثال

- مثال

- $$\begin{cases} T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n - 1 & for\, n > 1, \quad n \quad a \quad power\, of \quad 2 \\ T(1) = 0 \end{cases}$$

$$n = 2^k \Rightarrow k = \lg n$$

$$\Rightarrow T(2^k) = 2T(\frac{2^k}{2}) + 2^k - 1 = 2T(2^{k-1}) + 2^k - 1$$

$$t_k = T(2^k)$$

$$\Rightarrow t_k = 2t_{k-1} + 2^k - 1 \Rightarrow t_k - 2t_{k-1} = 2^k - 1$$

$$\Rightarrow t_k = c_1 + c_2 2^k + c_3 k 2^k$$

$$\Rightarrow T(2^k) = c_1 + c_2 2^k + c_3 k 2^k$$

$$\Rightarrow T(n) = c_1 + c_2 n + c_3 n \lg n$$

$$\Rightarrow T(n) = n \lg n - (n - 1)$$

تغيير متغير: مثال

- مثال 2 $\quad$ $\begin{cases} T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + 18\left(\frac{n}{2}\right)^2 & \text{for } n > 1, \quad n \quad a \quad \text{power of} \quad 2 \\ T(1) = 0 \end{cases}$

$$n = 2^k \Rightarrow k = \lg n$$

$$\Rightarrow T(2^k) = 7T(2^{k-1}) + 18(2^{k-1})^2$$

$$t_k = T(2^k)$$

$$\Rightarrow t_k = 7t_{k-1} + 18(2^{k-1})^2 = 7t_{k-1} + 18(4^{k-1}) = 7t_{k-1} + 4^k(\frac{18}{4})$$

b=4, n=0

$$\Rightarrow t_k = c_1 7^k + c_2 4^k$$

$$\Rightarrow T(2^k) = c_1 7^k + c_2 4^k$$

$$\Rightarrow T(n) = c_1 7^{\lg n} + c_2 4^{\lg n} = c_1 n^{\lg 7} + c_2 n^{\lg 4} = c_1 n^{\lg 7} + c_2 n^2$$

$$\Rightarrow T(n) = 6n^{\lg 7} - 6n^2 \approx 6n^{2.81} - 6n^2$$

حل روابط بازگشتی با جایگذاری

- مثال

- $$\begin{cases} t_n = t_{n-1} + n & for \quad n > 1 \\ t_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + n \\ &= t_{n-2} + (n-1) + n \\ &= t_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\ &= \cdots \\ &= t_{n-i} + \sum_{k=0}^{i-1} n-k \end{aligned}$$

$$n - i = 1 \Rightarrow i = n-1$$

$$\Rightarrow t_n = t_1 + \sum_{k=0}^{n-2} n-k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

حل روابط بازگشتی بوسیله قضیه اصلی

- قضیه اصلی (ب-۵)

فرض کنید تابع پیچیدگی $T(n)$ غیر نزولی است و بصورت زیر است:

$$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + cn^k$$ برای n>1، n توانی از b

$$T(1) = d$$

که در آن b>=2 و k>=0 مقادیر صحیح و a ، c و d ثوابتی هستند که a>0، c>0 و d>=0 است، داریم:

$$T(n) \in \begin{cases} \theta(n^k) & if \quad a < b^k \\ \theta(n^k \lg n) & if \quad a = b^k \\ \theta(n^{\log_b^a}) & if \quad a > b^k \end{cases}$$

حل روابط بازگشتی بوسیله قضیه اصلی

- مثال ب-۲۶ : فرض کنید T(n) تابع نزولی نهایی باشد و موارد زیر را برآورده می کند:

$$\begin{array}{ll} T(n) = \overset{a}{\overset{\downarrow}{8}}\, T(n/\overset{b}{\overset{\downarrow}{4}}) + 5n^{\overset{k}{\overset{\downarrow}{2}}} & \text{for } n > 1, n \text{ a power of 4} \\ T(1) = 3 & \end{array}$$

- با توجه به قضیه اصلی و $8<4^2$ داریم:

$$T(n) \in \Theta(n^2)$$

حل روابط بازگشتی بوسیله قضیه اصلی

- مثال ب-۲۷ : فرض کنید T(n) تابع نزولی نهایی باشد و موارد زیر را برآورده می کند:

$$\begin{array}{ll} T(n) = \overset{\overset{a}{\downarrow}}{9}\, T(n/\overset{\overset{b}{\downarrow}}{3}) + 5n^{\overset{\overset{k}{\downarrow}}{1}} & \text{for } n > 1, n \text{ a power of } 3 \\ T(1) = 7 & \end{array}$$

- با توجه به قضیه اصلی و $9>3^1$ داریم:

$$T(n) \in \Theta\left(n^{\log_3 9}\right) = \Theta\left(n^2\right).$$

طراحی الگوریتم

درخت بازگشت

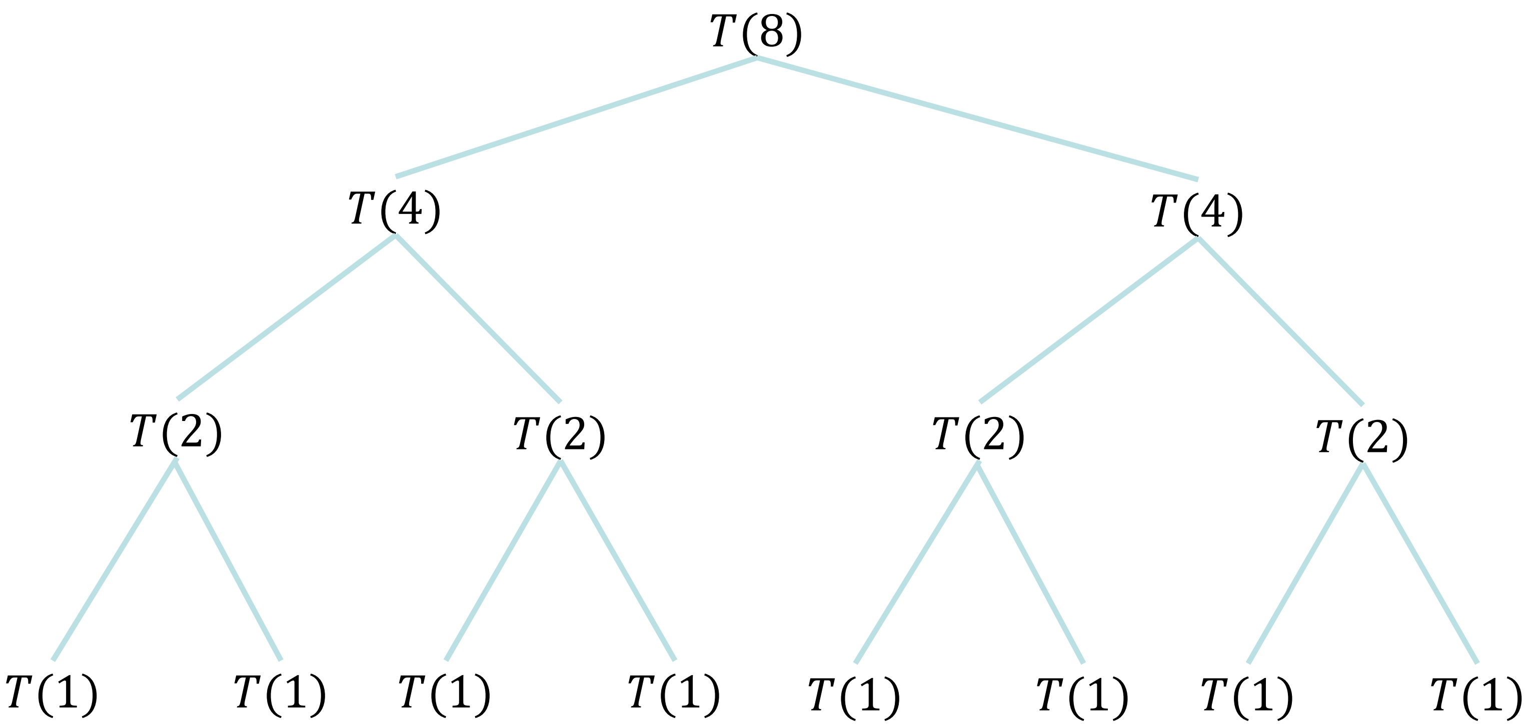
محمدجواد فدائی اسلام

درخت بازگشت
Recursion Tree

- یکی از روش‌های خوب برای حل یا حدس رابطه‌های بازگشتی، استفاده از درخت بازگشت است. این روش نحوه جای‌گذاری یک عبارت بازگشتی و نیز مقدار ثابتی را که در هر سطح از آن عبارت به دست می‌آید نشان می‌دهد. حاصل جمع مقادیر ثابت تمام سطح‌ها، جواب رابطه بازگشتی است.

- $T(n) = \begin{cases} 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n & n > 1, n = 2^k \\ 1 \quad , & n = 1 \end{cases}$

$$T(n) = \begin{cases} 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n & n > 1, n = 2^k \\ 1 \quad , & n = 1 \end{cases}$$



8

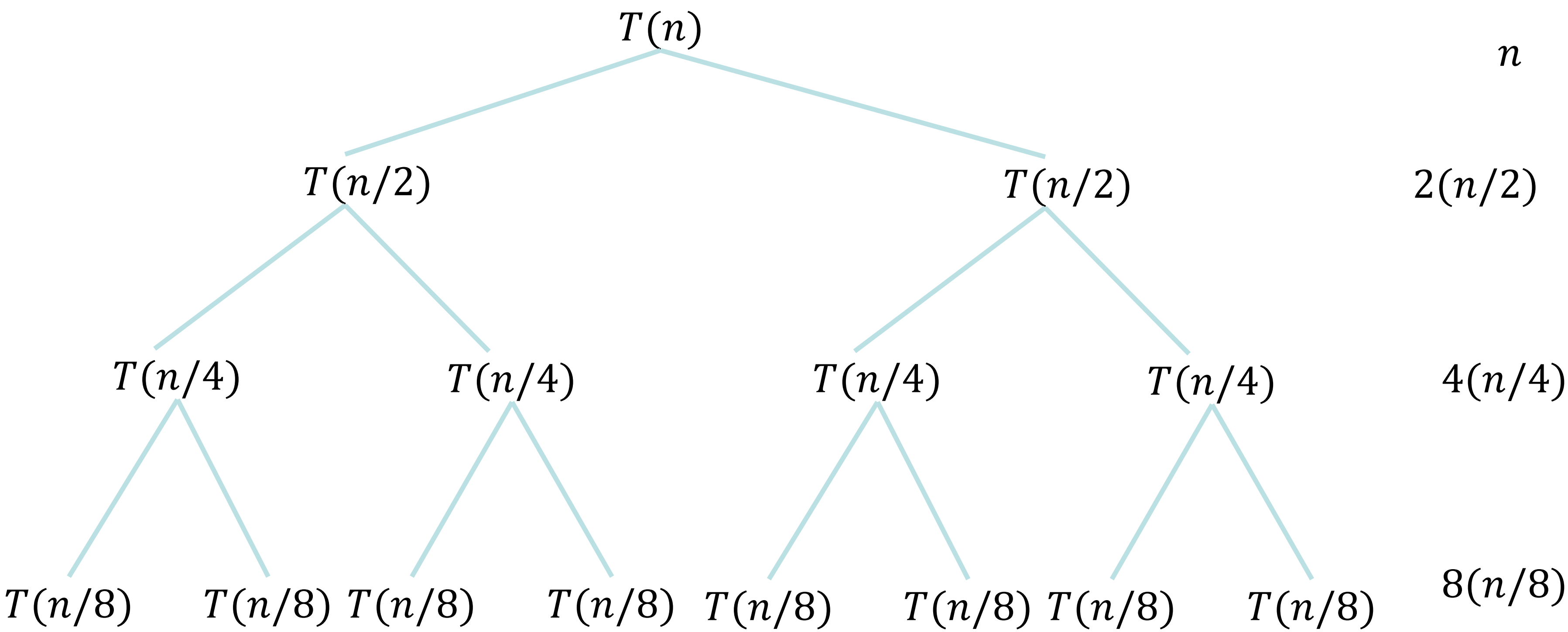
$2(4)$

$4(2)$

$8(1)$

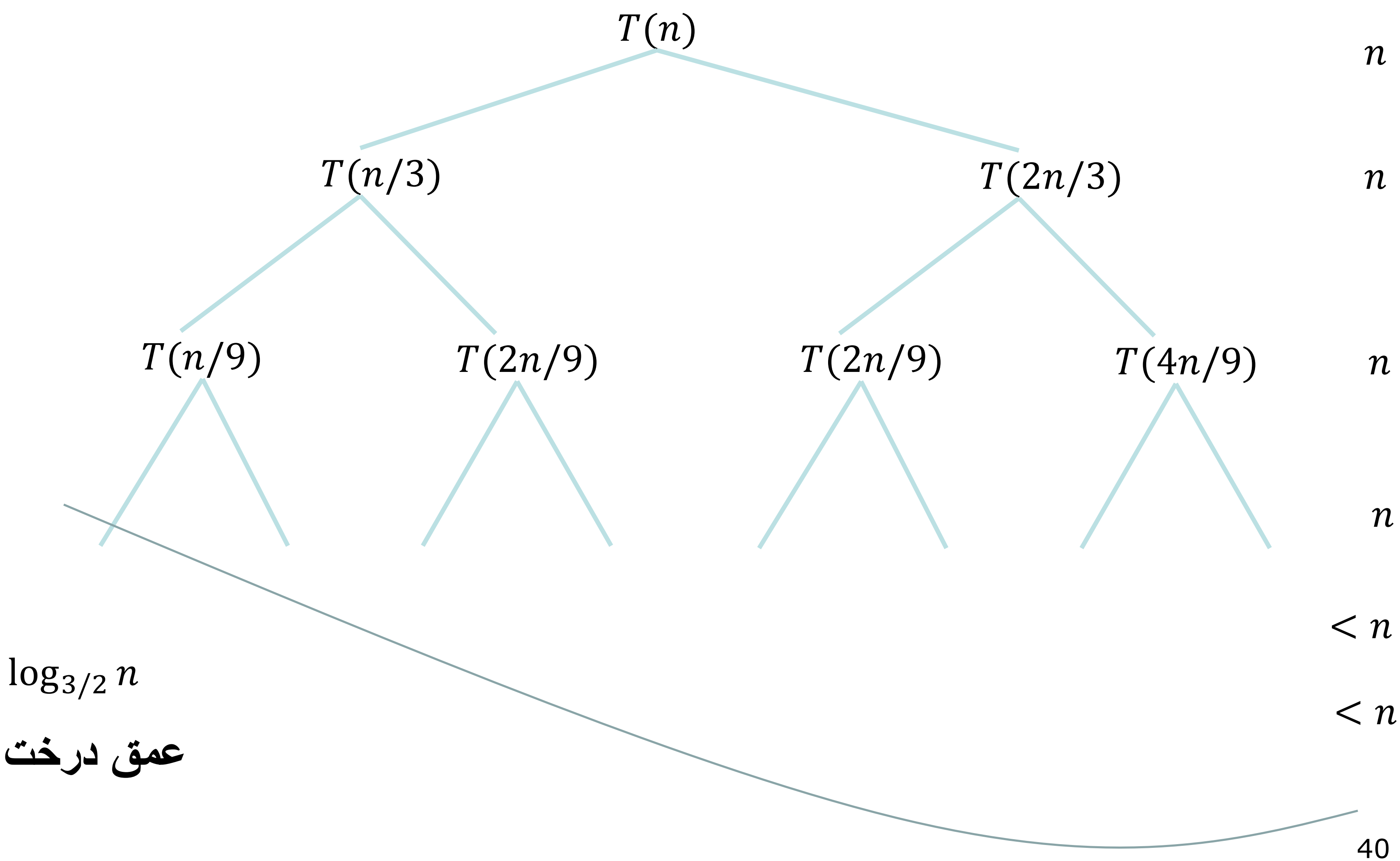
$$4(8) = (\log_2 8 + 1)8 = 32$$

$$T(n) = \begin{cases} 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n & n > 1, n = 2^k \\ 1 \quad , & n = 1 \end{cases}$$



$$(\log_2 n + 1)n$$

$$T(n) = \begin{cases} T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n & n > 1 \\ 1 \quad , & n = 1 \end{cases}$$



پیچیدگی در حالت کلی

$$\left.\begin{array}{c} T(n) = T(\alpha n) + T(\beta n) + n \\ 0 < \alpha < \beta \\ \alpha + \beta = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow T(n)$$

$$= O(nlogn)$$

$$T(n) = \begin{cases} T(n-1) + n & n > 1 \\ 1 \quad , & n = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} T(n) & n \\ | & \\ T(n-1) & n-1 \\ | & \\ T(n-2) & n-2 \\ | & \\ \cdots & \\ | & \\ T(1) & 1 \end{array}$$

$$T(n) = n(n+1)/2$$