

بینایی کامپیوتر فصل ششم نگاشت دو تصویر

IMAGE ALIGNMENT

محمدجواد فدائی اسلام

اردیبهشت ۱۴۰۵

نقاط دوبعدی

○ مختصات دوبعدی

$$p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

○ مختصات دوبعدی همگن (homogeneous coordinates)

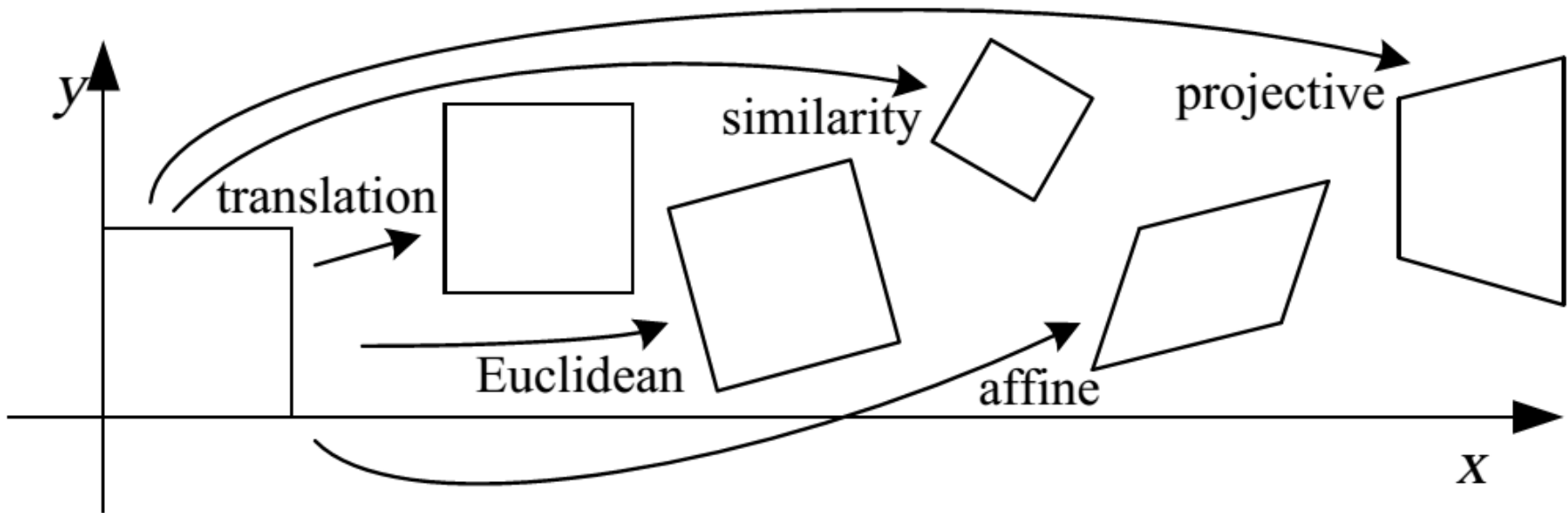
$$\tilde{p} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{w} \end{pmatrix}$$

○ بردار تقویت شده (augmented vector)

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{p} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{w}) = \tilde{w}(x, y, 1) = \tilde{w}\bar{p}$$

تبدیلات دوبعدی



تبدیلات دوبعدی (انتقال)

$$p' = p + t$$

$$p' = [I \mid t] \bar{p}, \quad \bar{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[I \mid t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \end{bmatrix}$$


از کنار هم قرار دادن دو ماتریس همانی و انتقال حاصل شده است

تبدیلات دوبعدی (انتقال+دوران) یا تبدیل اقلیدسی

$$\acute{p} = Rp + t$$

$$\acute{p} = [R|t]\bar{p}$$

$$[R|t] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & t_y \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R^T R = I, |R| = 1, R^T = R^{-1}$$

تبدیلات دوبعدی (مشابهت SIMILARITY)

$$p' = sRp + t$$

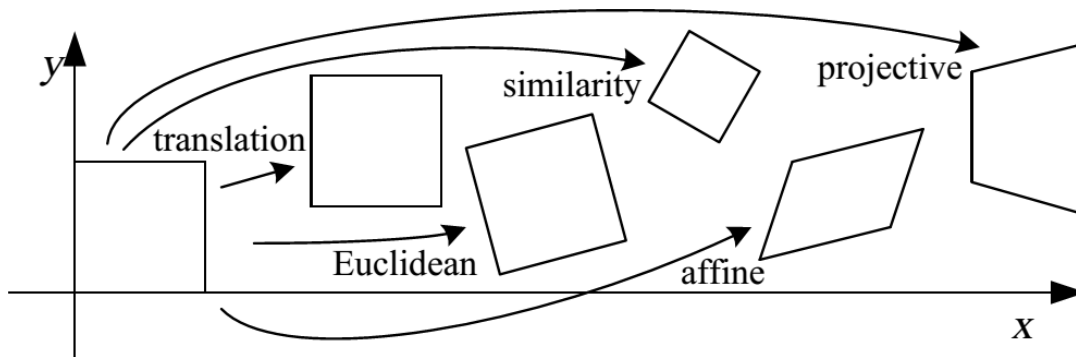
$$p' = [sR \quad t] \bar{p} = \begin{bmatrix} a & -b & t_x \\ b & a & t_y \end{bmatrix} \bar{p}$$

○ زوایا بدون تغییر می‌مانند.

تبدیلات دوبعدی (افین AFFINE)

$$\vec{p}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \vec{p}$$

○ خطوط موازی، موازی می‌مانند.

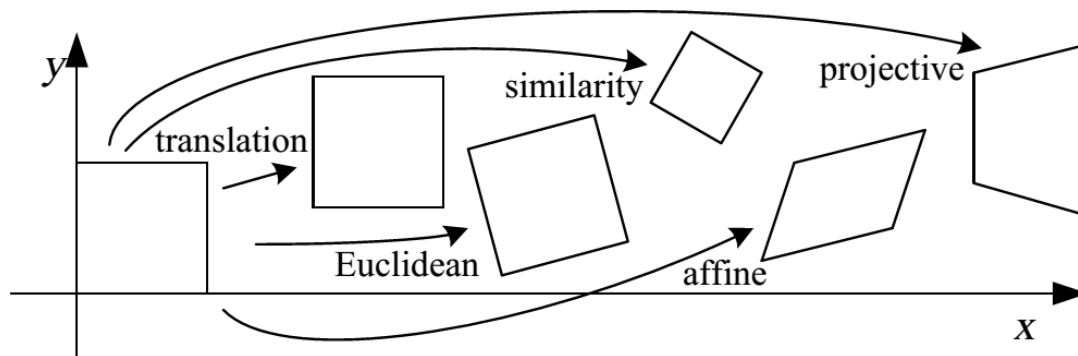


تبدیلات دوبعدی (پروجکتیو PROJECTIVE)

$$\tilde{p}' = \tilde{H}\tilde{p}$$

○ خطوط راست، راست می مانند.

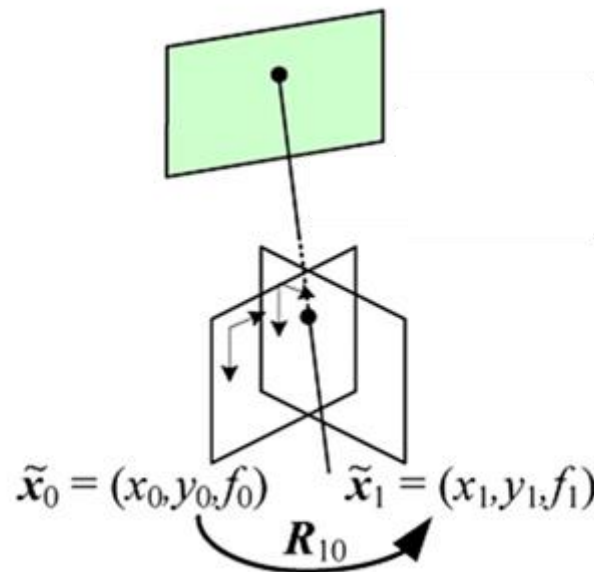
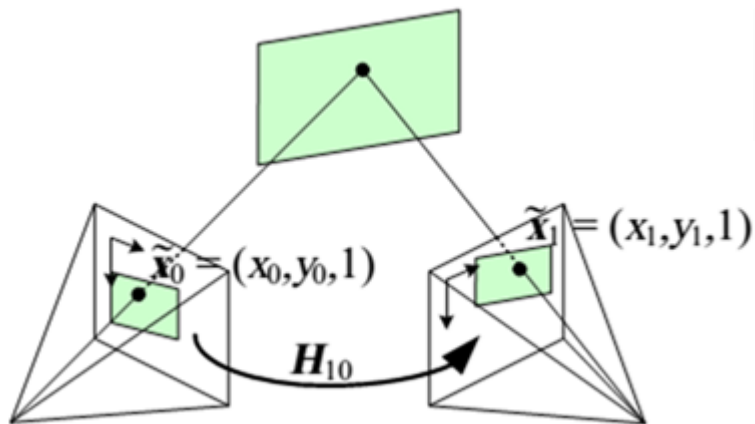
○ $\tilde{H}$ یک ماتریس 3×3 دلخواه است.



سلسله مراتب تبدیلات دو بعدی

Transformation	Matrix	# DoF	Preserves	Icon
translation	$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & & \mathbf{t} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$	2	orientation	
rigid (Euclidean)	$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & & \mathbf{t} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$	3	lengths	
similarity	$\begin{bmatrix} s\mathbf{R} & & \mathbf{t} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$	4	angles	
affine	$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$	6	parallelism	
projective	$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$	8	straight lines	

نگاشت پروجکتیو



اگر صحنه تصویر برداری مسطح باشد، یا در فاصله دوری باشد؛ یا دوربین صرفاً حرکت چرخشی داشته باشد. با یک ماتریس 3×3 می‌توان دو نقطه متناظر را به هم نگاشت نمود.

نگاشت دو تصویر (مراحل روش مبتنی بر ویژگی)

- (1) یافتن ویژگی مناسب
- (2) انطباق ویژگی‌ها
- (3) انتخاب تعداد ویژگی لازم و محاسبه H با استفاده از تبدیل خطی مستقیم

Direct Linear Transform

نگاشت دو تصویر (محاسبه H)

$$\hat{\mathbf{x}}_i \sim H\mathbf{x}_i$$

دو مقدار $\hat{\mathbf{x}}_i$ و $H\mathbf{x}_i$ هم جهت هستند اما ممکن است مساوی نباشند.
پس ضرب خارجی آنها برابر صفر است.

$$\hat{\mathbf{x}}_i \times H\mathbf{x}_i = 0$$

$$H\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} h^1\mathbf{x}_i \\ h^2\mathbf{x}_i \\ h^3\mathbf{x}_i \end{pmatrix}$$

$h^j = j - \text{th row of the matrix } H$

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}, h^j = [h_{j1} \quad h_{j2} \quad h_{j3}]$$

نگاشت دو تصویر (محاسبه H) ادامه

$$\dot{\mathbf{x}}_i \times H\mathbf{x}_i = 0$$

$$H\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} h^1\mathbf{x}_i \\ h^2\mathbf{x}_i \\ h^3\mathbf{x}_i \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{w}_i)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_i \times H\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{w}_i & \dot{y}_i \\ \dot{w}_i & 0 & -\dot{x}_i \\ -\dot{y}_i & \dot{x}_i & 0 \end{pmatrix} H\mathbf{x}_i = 0$$

$$\dot{\mathbf{x}}_i \times H\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & -\dot{w}_i\mathbf{x}_i^T & \dot{y}_i\mathbf{x}_i^T \\ w_i\dot{\mathbf{x}}_i^T & \mathbf{0}^T & -\dot{x}_i\mathbf{x}_i^T \\ -\dot{y}_i\mathbf{x}_i^T & \dot{x}_i\mathbf{x}_i^T & \mathbf{0}_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^{1T} \\ h^{2T} \\ h^{3T} \end{pmatrix} = 0$$

$H: 3 \times 3, h^{1T}: 3 \times 1$

T : transpose

تبدیل ضرب خارجی به ضرب ماتریسی

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} & i(a_2b_3 - a_3b_2) \\ & -j(a_1b_3 - a_3b_1) \\ & +k(a_1b_2 - a_2b_1) = \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

نگاشت دو تصویر (محاسبه H) ادامه

$$\dot{\mathbf{x}}_i \times H \mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & -\dot{w}_i \mathbf{x}_i^T & \dot{y}_i \mathbf{x}_i^T \\ w_i \dot{\mathbf{x}}_i^T & \mathbf{0}^T & -\dot{\mathbf{x}}_i \mathbf{x}_i^T \\ -\dot{y}_i \mathbf{x}_i^T & \dot{\mathbf{x}}_i \mathbf{x}_i^T & \mathbf{0}_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^{1T} \\ h^{2T} \\ h^{3T} \end{pmatrix} = 0$$

$$A \begin{pmatrix} h^{1T} \\ h^{2T} \\ h^{3T} \end{pmatrix} = 0$$

$$SVD(A) = UDV^T$$

برای یافتن پاسخ غیربديهی $A\mathbf{x} = 0$ باید از تجزیه به نقاط منفرد استفاده کرد.

اگر D یک ماتریس قطری با چینش نزولی و با اعداد مثبت باشد، آخرین ستون V جواب مساله است.

درجه آزادی ماتریس H برابر ۸ است. با دانستن چهار نقطه و متناظر آنها در تصویر دیگر می‌توان آن را به دست آورد.

RANSAC

- تعداد نقاط متناظر در دو تصویر بیش از چهار نقطه است.
- برای محاسبه کاراتر H از روش RANSAC استفاده می‌شود.

RANdom Sample Consenses

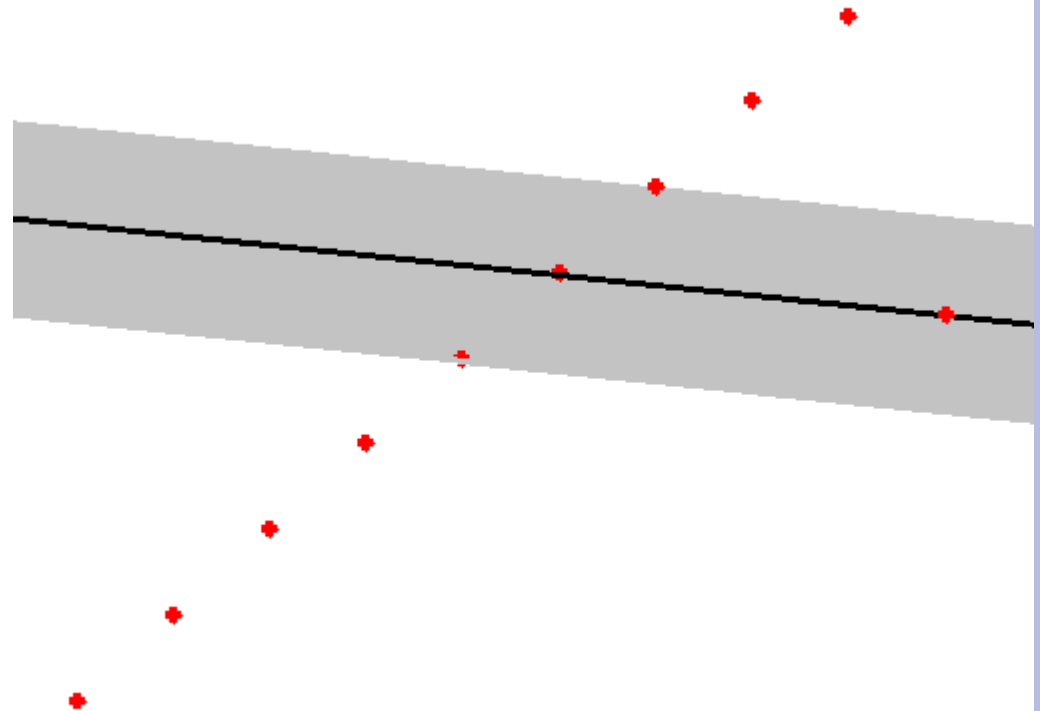
در روش RANSAC به صورت تکرار شونده چهار نقطه انتخاب می‌شود و از روی آن ماتریس H به دست می‌آید. با استفاده از این H ، اختلاف بین نقاط دیگر و متناظرشان در تصویر دیگر محاسبه می‌شود و تعداد نقاطی که اختلافشان از حد آستانه‌ای کمتر است (inliers) به دست می‌آید. ماتریس هموگرافی متناظر با چهار نقطه‌ای که بیشترین inliers را دارد به عنوان ماتریس تبدیل دو تصویر در نظر گرفته می‌شود.

RANSAC

انتخاب دو نقطه برای یافتن معادله خط (۱)

تعداد نقاط درون افتاده = ۲
Number of inliers

$$(6,12), (10,11)$$
$$x + 4y - 54 = 0$$

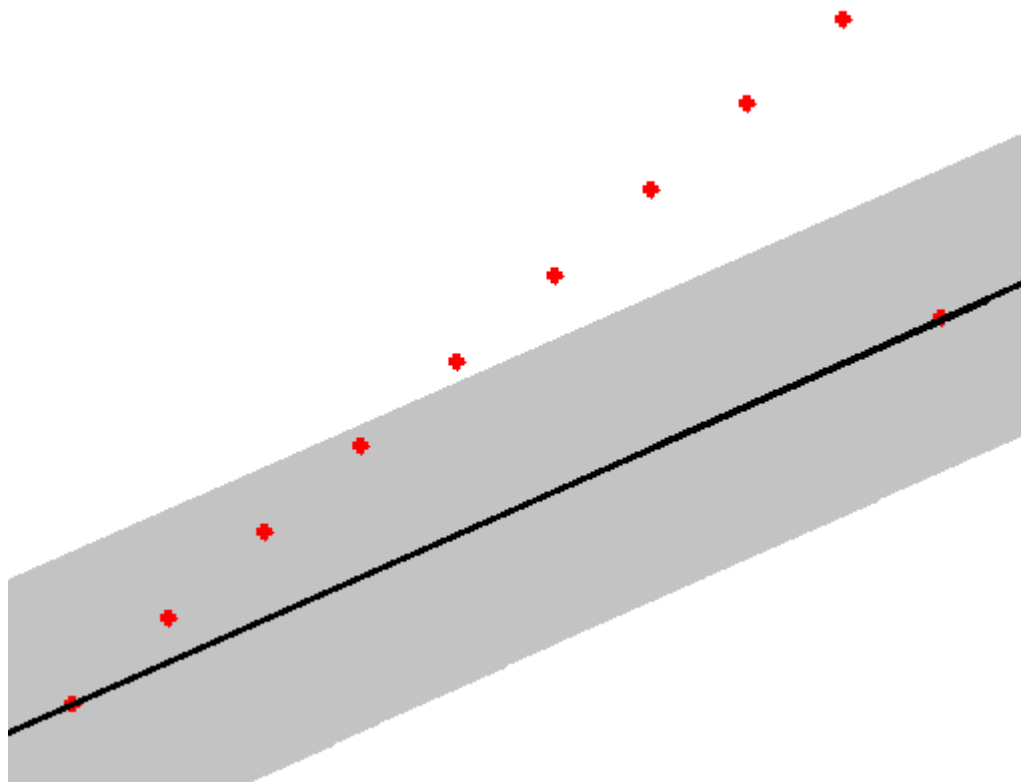


RANSAC

انتخاب دو نقطه برای یافتن معادله خط (۲)

تعداد نقاط درون افتاده = ۳
Number of inliers

$$(1,2), (10,11)$$
$$x - y + 1 = 0$$



RANSAC

انتخاب دو نقطه برای یافتن معادله خط (۳)

تعداد نقاط درون افتاده = γ
Number of inliers

$(1,2), (2,4)$
 $2x - y = 0$

