



بینایی کامپیوتر
فصل ششم
دید سه بعدی

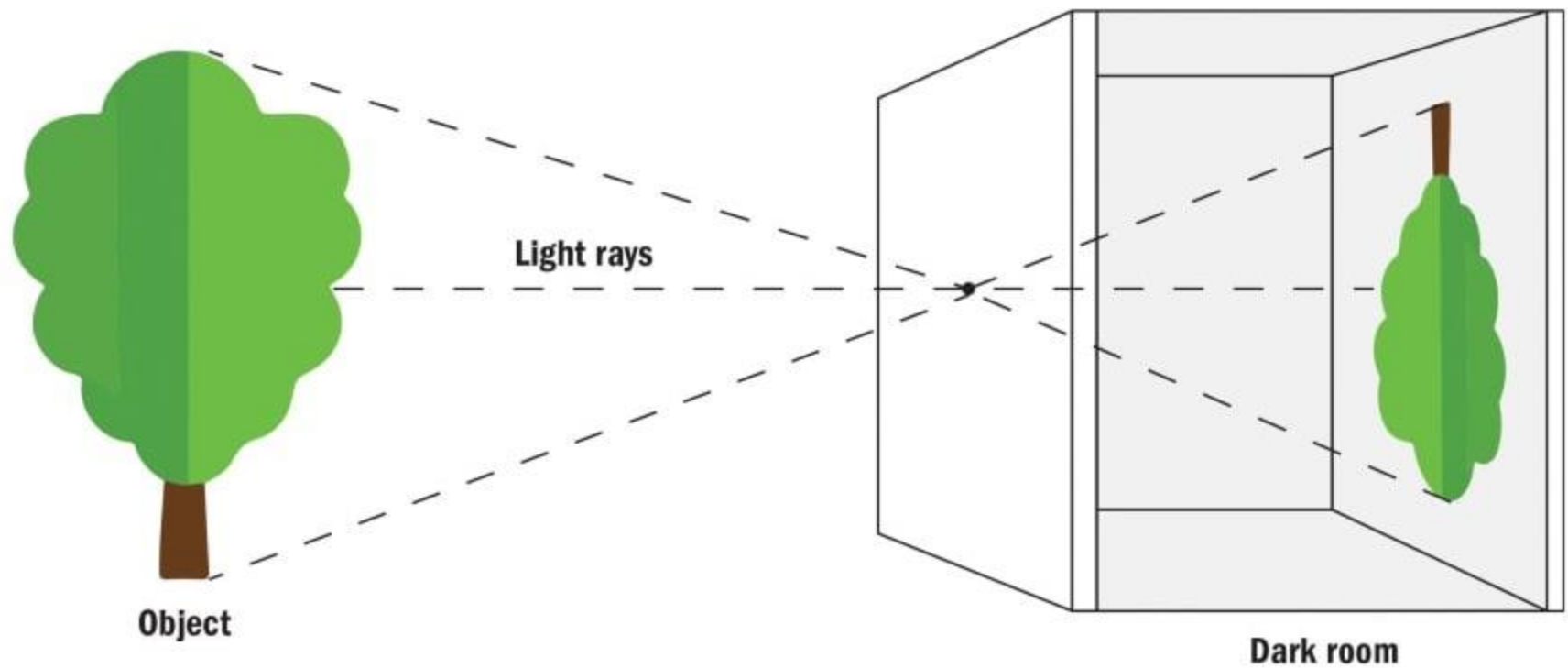
CAMERA CALIBRATION

محمدجواد فدائی اسلام
اردیبهشت ۱۴۰۴

بیان مساله

- تخمین پارامترهای درونی و بیرونی دوربین بر اساس برخی الگوهای تصویر شناخته شده
- بدین معنا که تعدادی جفت نقطه سه‌بعدی از الگو و پیکسل متناظر آن در تصویر موجود است و با آنها ماتریس‌های درونی و بیرونی دوربین تخمین شده شود.

کارکرد دوربین

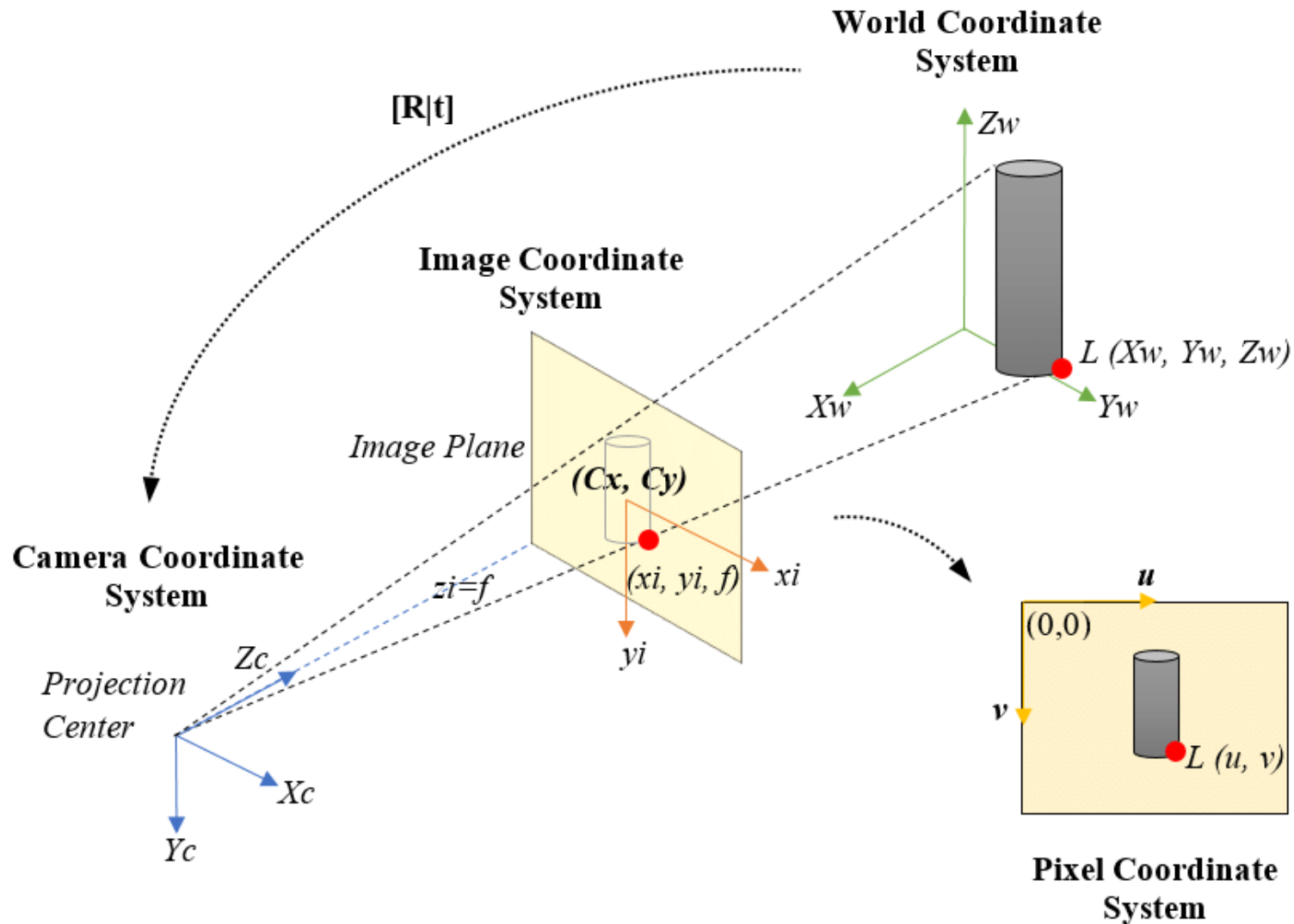


مدل سوراخ سنجاقی دوربین
Pin-hole Camera Model

PINHOLE CAMERA MODEL

مدل سوراخ سنجاقی

IDEAL PROJECTION OF A 3D OBJECT ON A 2D IMAGE



پارامترهای دوربین

○ Extrinsic Parameters پارامترهای خارجی

- نگاشت بین مختصات جهانی و مختصات دوربین

○ Intrinsic Parameters پارامترهای داخلی

- برقراری ارتباط بین پیکسل و مختصات متناظرش در مختصات دوربین

پارامترهای داخلی دوربین

○ فاصله کانونی (f)

○ اندازه عمودی و افقی پیکسل (S_y و S_x)

○ مرکز تصویر (O_y و O_x)

پارامترهای داخلی دوربین ۵ تا هستند.

این ۵ پارامتر به هم وابسته هستند.

آنها را به پارامترهای زیر تبدیل می‌کنیم تا به ۴ پارامتر مستقل تبدیل شوند.

$$O_x, O_y, f_x = \frac{f}{S_x}, \alpha = S_y/S_x$$

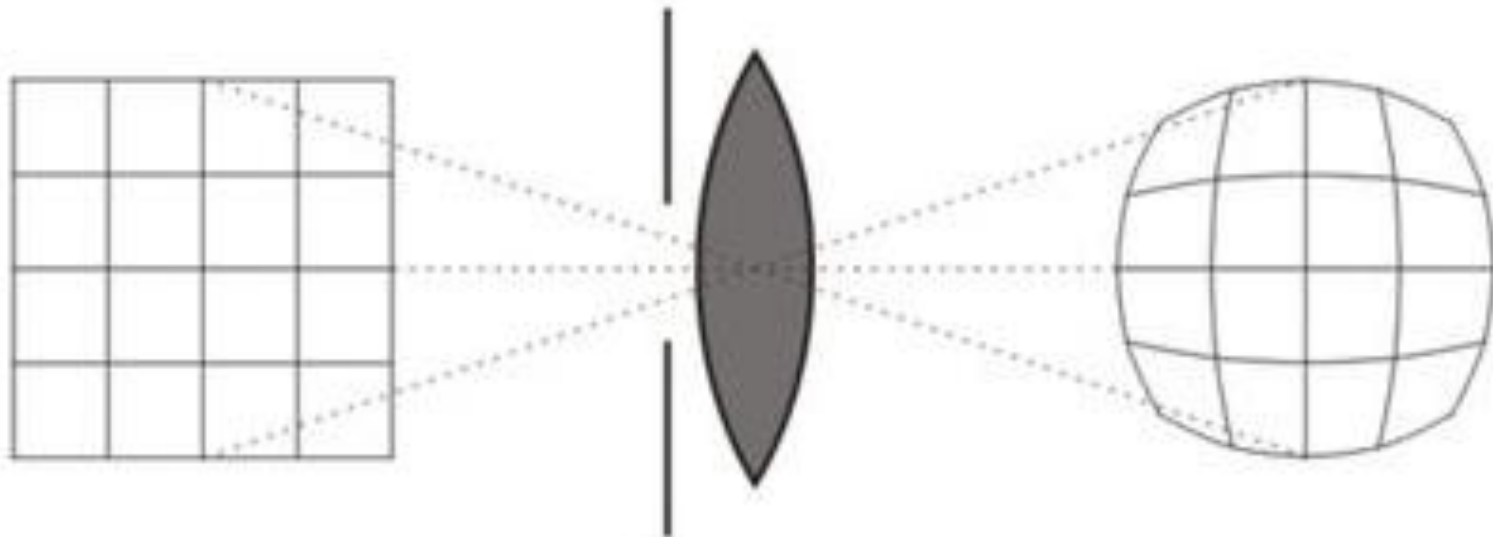
اعوجاج ناشی از عدسی دوربین که ضریبی به صورت k_1 دارد یکی دیگر از مشخصات داخلی دوربین است. در معادلات این فصل فرض شده است که این اعوجاج برطرف شده است.

LENS DISTORTION

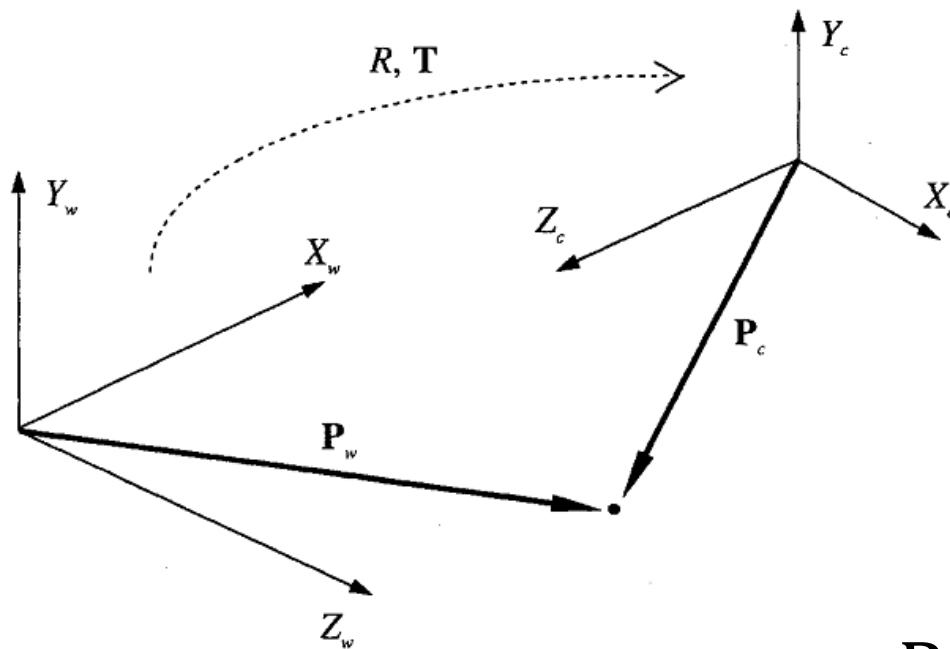


LENS DISTORTION

اعوجاج دوربين



Barrel Distortion



پارامترهای خارجی دوربین

○ ماتریس دوران (R)

○ ماتریس انتقال (T)

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X^C \\ Y^C \\ Z^C \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X^W \\ Y^W \\ Z^W \end{bmatrix} + T$$

$$T = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}$$

خصوصیات ماتریس دوران

○ ماتریس متعامد است (ortho):

• یعنی ستون‌ها و سطرهاى آن متعامد هستند

○ نرمال است (normal):

• اندازه سطرها و ستون‌های آن یک است.

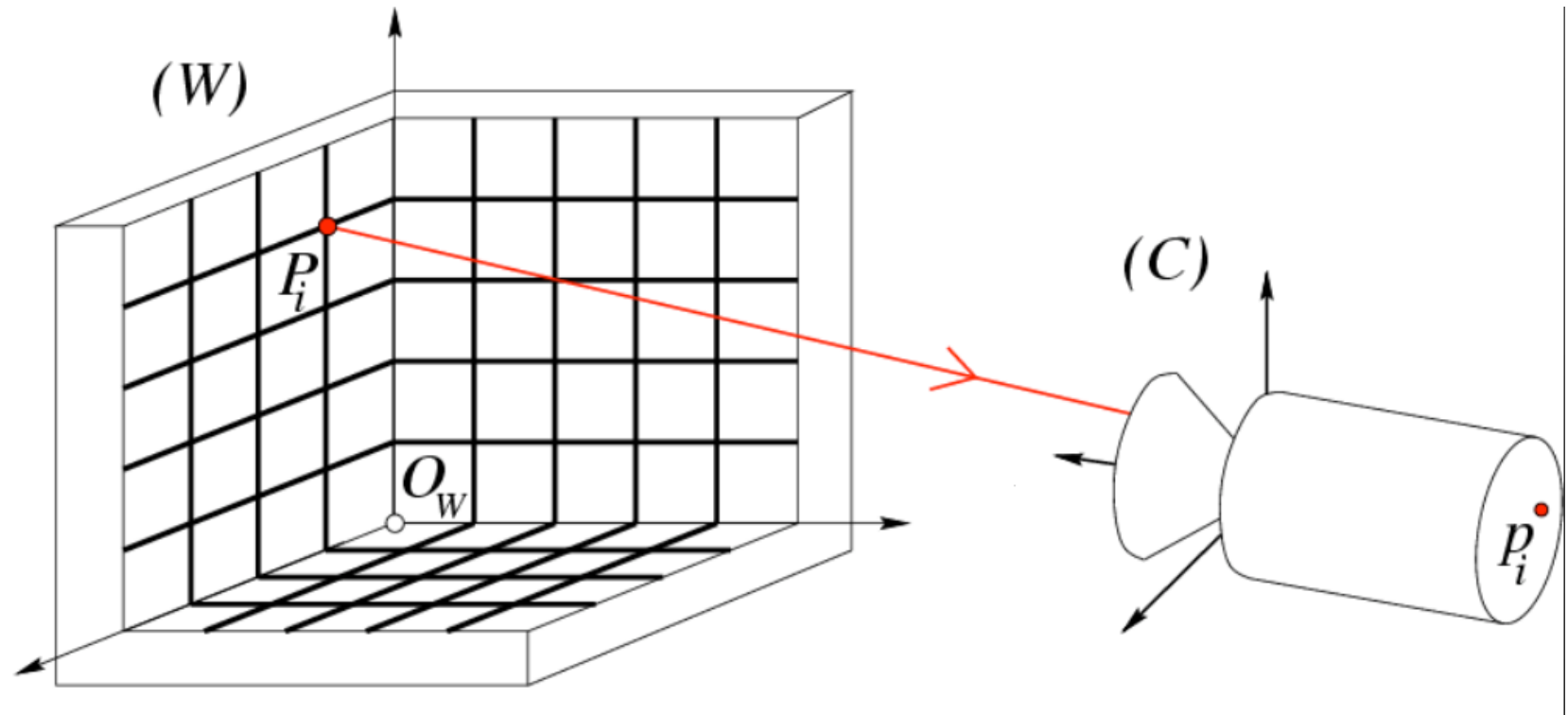
○ حاصل ضرب آن با ترانزهاده‌اش برابر با ماتریس همانی است.

$$R^T R = I$$
$$R^T = R^{-1}$$

○ مقدار دترمینان آن برابر با ۱ است.

$$\det(R) = 1$$

الگوی کالیبراسیون



توجه

- الگو باید به گونه‌ای تصویر برداری شود که نقطه ناپدید شدگی زیاد از مرکز تصویر برداری دور نباشد. در غیر این صورت خطوط، موازی به نظر می‌رسند و یافتن نقطه ناپدید شدگی مشکل خواهد بود.
- نقطه ناپدید شدگی (vanishing point)



انتقال از مختصات جهانی به مختصات دوربین

$$\begin{bmatrix} X^c \\ Y^c \\ Z^c \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X^w \\ Y^w \\ Z^w \end{bmatrix} + T$$

انتقال از مختصات دوربین به تصویر

$$\begin{aligned} -\frac{(x_{im} - O_x)s_x}{f} &= \frac{X^c}{Z^c} \\ -\frac{(y_{im} - O_y)s_y}{f} &= \frac{Y^c}{Z^c} \end{aligned}$$

○ با فرض حذف اعوجاج عدسی و دانستن مرکز تصویر پردازی داریم:

$$-\frac{(x_{im}-O_x)s_x}{f} = \frac{X^c}{Z^c}$$
$$-\frac{(y_{im}-O_y)s_y}{f} = \frac{Y^c}{Z^c}$$



$$-x = \frac{f}{s_x} \frac{X^c}{Z^c} = f_x \frac{X^c}{Z^c}$$
$$-y = \frac{f}{s_y} \frac{Y^c}{Z^c} = f_y \frac{Y^c}{Z^c}$$

$$X^c = r_{11}X^w + r_{12}Y^w + r_{13}Z^w + T_x$$

$$Y^c = r_{21}X^w + r_{22}Y^w + r_{23}Z^w + T_y$$

$$Z^c = r_{31}X^w + r_{32}Y^w + r_{33}Z^w + T_z$$

$$x = -f_x \frac{r_{11}X^w + r_{12}Y^w + r_{13}Z^w + T_x}{r_{31}X^w + r_{32}Y^w + r_{33}Z^w + T_z}$$

$$y = -f_y \frac{r_{21}X^w + r_{22}Y^w + r_{23}Z^w + T_y}{r_{31}X^w + r_{32}Y^w + r_{33}Z^w + T_z}$$

با جابه جایی داریم

$$x = -f_x \frac{r_{11}X^w + r_{12}Y^w + r_{13}Z^w + T_x}{r_{31}X^w + r_{32}Y^w + r_{33}Z^w + T_z}$$
$$y = -f_y \frac{r_{21}X^w + r_{22}Y^w + r_{23}Z^w + T_y}{r_{31}X^w + r_{32}Y^w + r_{33}Z^w + T_z}$$

$$\frac{f_x}{x} (r_{11}X^w + r_{12}Y^w + r_{13}Z^w + T_x) =$$
$$\frac{f_y}{y} (r_{21}X^w + r_{22}Y^w + r_{23}Z^w + T_y)$$

برای هر نقطه و متناظر آن در تصویر می‌توان اینگونه نوشت

$$x_i X_i^w v_1 + x_i Y_i^w v_2 + x_i Z_i^w v_3 + x_i v_4 - y_i X_i^w v_5 - y_i Y_i^w v_6 - y_i Z_i^w v_7 - y_i v_8 = 0$$

$$v_1 = r_{21}$$

$$v_2 = r_{22}$$

$$v_3 = r_{23}$$

$$v_4 = Ty$$

$$v_5 = \alpha r_{11}$$

$$v_6 = \alpha r_{12}$$

$$v_7 = \alpha r_{13}$$

$$v_8 = \alpha T_x$$

می‌توان آن را به صورت یک معادله خطی برای N نقطه نوشت:

$$Av = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 X_1^w & x_1 Y_1^w & x_1 Z_1^w & x_1 & -y_1 X_1^w & -y_1 Y_1^w & -y_1 Z_1^w & -y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N X_N^w & x_N Y_N^w & x_N Z_N^w & x_N & -y_N X_N^w & -y_N Y_N^w & -y_N Z_N^w & -y_N \end{bmatrix}$$

حل معادله خطی با استفاده از تجزیه به نقاط تکین

○ ماتریس A را می‌توان اینگونه نوشت:

$$A = UDV^T$$

○ ستونی از V که متناظر با تنها نقطه تکین صفر (یا نزدیک صفر) از قطر اصلی ماتریس D است به عنوان جواب می‌توان در نظر گرفت.

حذف ضریب

○ ممکن است جواب در یک ضریب (γ) ضرب شده باشد

$$V = \gamma(r_{21} \ r_{22} \ r_{23} \ T_y \ \alpha r_{11} \ \alpha r_{12} \ \alpha r_{13} \ \alpha T_x)$$

○ از آنجا که:

$$r_{21}^2 + r_{22}^2 + r_{23}^2 = 1$$

○ پس داریم:

$$\sqrt{\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 + \bar{v}_3^2} = \sqrt{\gamma^2(r_{21}^2 + r_{22}^2 + r_{23}^2)} = |\gamma|$$

یافتن مقدار α

$$\sqrt{\bar{v}_5^2 + \bar{v}_6^2 + \bar{v}_7^2} = \sqrt{\gamma^2 \alpha^2 (r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{13}^2)} = \alpha |\gamma|$$

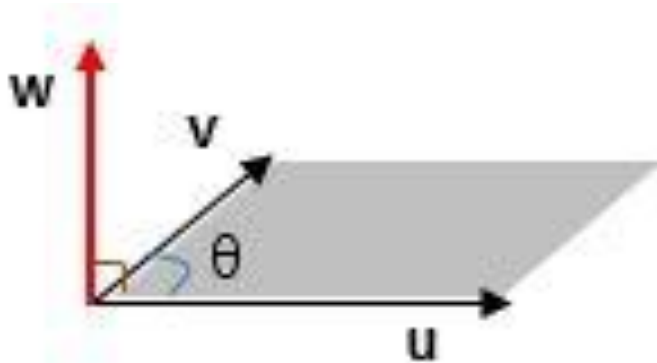
○ مقدار α همواره بزرگتر از صفر است.

○ نکته: در محاسبات باید مقادیر ماتریس T تعیین علامت شود (خارج از تدریس).

محاسبه ردیف سوم از R

○ از آنجا که سه ردیف ماتریس R برهم عمودند. پس می توان نوشت:

$$R_3 = R_1 \times R_2$$



$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

بهبود ماتریس R

- ماتریس R باید دارای ویژگی زیر باشد (orthonormality)

$$RR^T = R^T R = 1$$

- اما ماتریس به دست آمده ممکن است این ویژگی را نداشته باشد. برای حل این مشکل و بهبود ماتریس به دست آمده مراحل زیر انجام می شود.

- ماتریس R تجزیه می شود:

$$R = UDV^T$$

- اگر ماتریس R خاصیت orthonormal را بخواهد داشته باشد باید

$$D = I$$

باشد از این رو $D=I$ قرار می دهیم و داریم

$$R' = UV^T$$

یافتن f_x و T_z

$$x = -f_x \frac{r_{11}X^w + r_{12}Y^w + r_{13}Z^w + T_x}{r_{31}X^w + r_{32}Y^w + r_{33}Z^w + T_z}$$

○ با استفاده از معادله بالا می توان نوشت

$$x_i(r_{31}X_i^w + r_{32}Y_i^w + r_{33}Z_i^w + T_z) = -f_x(r_{11}X_i^w + r_{12}Y_i^w + r_{13}Z_i^w + T_x)$$

$$A \begin{pmatrix} T_z \\ f_x \end{pmatrix} = b$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & (r_{11}X_1^w + r_{12}Y_1^w + r_{13}Z_1^w + T_x) \\ x_2 & (r_{11}X_1^w + r_{12}Y_1^w + r_{13}Z_1^w + T_x) \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ x_N & (r_{11}X_N^w + r_{12}Y_N^w + r_{13}Z_N^w + T_x) \end{bmatrix}$$

یافتن T_x و f_x - ادامه

$$b = \begin{pmatrix} -x_1(r_{31}X_1^w + r_{32}Y_1^w + r_{33}Z_1^w) \\ \vdots \\ \vdots \\ -x_N(r_{31}X_N^w + r_{32}Y_N^w + r_{33}Z_N^w) \end{pmatrix}$$

حل با روش زیر

$$\begin{pmatrix} \hat{T}_z \\ \hat{f}_x \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

یافتن T_x و f_x - ادامه

○ با روش زیر می توان مقدار آنها را محاسبه نمود.

$$\begin{pmatrix} \hat{T}_z \\ \hat{f}_x \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b$$